УДК 519.2

Л.М. Іллічева
(Національній авіаційний університет, Україна)
Т.В. Авдєєва
(Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»)

Властивості авторегресії при дослідженні ефективного фінансового ринку

Описані характерні властивості ефективності фінансового ринку. При моделюванні процесів ефективного фінансового ринку застосований авторегресійний процес. Показано, що одномірний маргінальний розподіл при характеристиці змін фінансових індексів в деякому випадку співпадає з маргінальним розподілом різницевого процесу, який побудований на основі авторегресійних даних.

Дослідження ефективності фінансового ринку.

Ефективний фінансовий ринок – це ринок, який раціонально реагує на поновлення інформації; відбувається миттєва корекція цін, котрі встановлюються таким чином, що стають «справедливими»; учасники ринку не мають можливості користатися арбітражними можливостями – одержувати прибуток за рахунок різниці в цінах; учасники ринку однорідним чином інтерпретують інформацію, що надійшла, причому миттєво коректують свої рішення при поновленні цієї інформації; учасники ринку однорідні у своїх цільових намірах, їх дії носіть «колективно-раціональний «характер». Для опису фінансового ринку застосовуються поняття теорії ймовірностей.

Нехай одиницею виміру слугує день, позначимо ринкову ціну акції або іншого фінансового індексу таким чином:

$$S = (S_n)_{n\geq 0}$$

Вводимо потік σ-алгебр $F = (F_n)_{n\geq 0}$, де F_n - доступна «інформація» про стан ринку до момента часу n.

S_n - F_n – вимірні, оскільки значення цін фінансових активів складаються в залежності від подій на ринку до «моменту» n включно; S_n - ціна в «час» n.

На основі формули «складних відсотків» можна записати:

$S_n = S_0 e^{H_n}, H_n = h_1 + h_2 + \cdots + h_n, h_0 = 0, n \geq 0,$

$h_n = h_n(\omega) - F_n$ – вимірні; причому: (1)

$$h_n = ln\frac{S_n}{S_{n-1}}$$

Концепція ефективного ринку формує гіпотезу мартингальності нормованих цін, поняття «мартингала» є одним з основних при дослідженні еволюції цін як стохастичних послідовностей або процесів.

Якщо допустити, що в моделі (1) виконується $E|h_n| < \infty, n \geq 1$, можна визначити умовні математичні сподівання: $E(h_n/F_{n-1})$. Скористаємося представленням H_n:

$$H_n = \sum_{k\leq n} E(h_k/F_{k-1}) + \sum_{k\leq n}[h_k - E(h_k/F_{k-1})]$$

Можна зробити висновок, що для $H = (H_n)_{n\geq 0}$ має місце розклад на 2 послідовності, де перша – передбачувана послідовність (для кожного n≤ 1 члени послідовності будуть F_{n-1} - вимірні), друга – мартингал.

При дослідженні закономірностей послідовності h_n можна допустити, що розподіл її членів – гауссівський. Однак, статистична обробка даних показує, що гауссівський розподіл величин не завжди їм адекватний. Припускають, що умовний розподіл ймовірностей величин $E(h_n/F_{n-1})$ є гауссівський з параметрами $\mu_n = \mu_n(\omega), \sigma_n^2 = \sigma_n^2(\omega)$, тобто умовний розподіл задається формулою:

$$P(h_n \leq x/F_{n-1})(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n^2}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(y-\mu_n(\omega))^2}{2\sigma_n^2(\omega)}}dy$$

Параметри μ_n, σ_n^2 - умовні середнє та дисперсія цього умовного розподілу. Розподіл h_n формується як суміш умовних гауссівських розподілів із усередненням по розподілу величин μ_n та σ_n^2.

Тоді величини $\varepsilon_n = \frac{h_n-\mu_n}{\sigma_n}, n \geq 1$ формують стандартну гауссівську послідовність, а умовно-гауссівські послідовності $h = (h_n)_{n\geq 1}$можна представити у вигляді:

$$h_n = \mu_n + \sigma_n\varepsilon_n,$$

- де $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ - послідовність незалежних $F_n -$ вимірних величин, які мають стандартний нормальний розподіл $N(0,1)$.

Більш детальне вивчення властивостей послідовності $h = (h_n)_{n\geq 1}$, а значить і послідовності S= $(S_n)_{n\geq 1}$, залежить від визначення структур μ_n, σ_n. [1]

Авторегресійна модель AR(p) порядку p.

В цій моделі допускається, що $F_n = \sigma(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \mu_n = a_0 + a_1h_{n-1} + \dots + a_ph_{n-p}, \sigma_n$=$\sigma = const(\sigma > 0)$.

Тоді $h_n = \mu_n + \sigma_n\varepsilon_n = a_0 + a_1h_{n-1} + \dots + a_ph_{n-p} + \sigma\varepsilon_n$

Розглянемо властивості авторегресійної моделі при p=1.

У цьому випадку одержимо:

$h_n = a_0 + a_1h_{n-1} + \sigma\varepsilon_n$, що можна при введенні відповідних позначень розглядати як:

$$h_n = \rho h_{n-1} + z_n \quad (2)$$

Можна заключити, що із «минулих» величин $h_{n-1}, \dots, h_{n-p}$ на h_n впливає тільки найближче до h_n значення h_{n-1}.

Розглянемо характеристичну функцію лінійного авторегресійного процесу C, яка у цьому випадку задовольняє умові:

$$C(h;\xi) = C(h;\rho\xi)C_\rho(z;\xi) \quad (3)$$

Введемо процес, який формується на основі авторегресії:

$$v^{[k]}(n) = h_n - h_{n-k}$$

Тоді отримаємо:

$$v^{[k]}(n) = -(1-\rho^k)h_{n-k} + \rho^{k-1}z(n-k+1) + \dots + z(n)$$

Із (3) будемо мати:

$$\mathrm{C}\left(v^{[k]};\xi\right) = C(h;-(1-\rho^k)\xi)C_\rho(z;\rho^{k-1}\xi)\dots C_\rho(z;\xi)$$
$$= C(h;-(1-\rho^k)\xi)C(h;\xi)/C(x;\rho^k\xi)$$

Звідти випливає, якщо допустити, що розподіл h_n симетричний відносно 0 і якщо $\rho = 2^{-1/k}$, тоді $\mathrm{C}\left(v^{[k]};\xi\right) = \mathrm{C}(h;\xi)$, тобто $v^{[k]}$ та h_n мають ідентичні одномірні маргінальні розподіли.[2]

Висновок. Як бачимо, одномірний маргінальний розподіл при характеристиці змін фінансових індексів при деякому значенні коефіцієнта регресії співпадає з маргінальним розподілом різницевого процесу, який побудований на основі авторегресійних даних.

Список літератури

1. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т.1. Факты. Модели. –Москва:ФАЗИС, 1998. – 512с.

2. Barndorff-Nielsen O.E., Jensen J.L., Sorensen M. Joints in Composite Structures. Phil.Trans.: Physical Sciences and Engineering, Sep.15, 1990, Vol. 332, № 1627, Stochastic processes. – 1990. – P. 439-455.