УДК 517.521.7

В.К. Репета (Національний авіаційний університет, Україна),
Л.А. Репета (КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна)

Застосування перетворення Абеля до знаходження суми числових рядів певного вигляду

Розглянуто метод знаходження суми збіжного числового ряду, загальний член якого є правильним раціональним дробом за умови, що знаменник дробу має лише прості цілі від'ємні нулі.

У процесі вивчення теми «Числові ряди» розглядають декілька задач, зокрема задачу знаходження суми збіжного числового ряду. Здебільшого ця задача обмежується обчисленням суми нескінченно спадної геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ або суми подібної до $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Поза увагою залишаються більш складні ряди. Це пов'язано, насамперед, зі скороченням кількості годин, які відводяться на вивчення вищої математики у ЗВО України.

Приміром, числовий ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_l(n)}{Q_m(n)},$$

де $P_l(n)$ та $Q_m(n)$ – многочлени l-го та m-го степеня відповідно у випадку $m-l>1$ є збіжним. Проте точну суму цього ряду можна знайти лише для певних реалізацій виразу $\frac{P_l(n)}{Q_m(n)}$. Існують різні підходи до обчислення суми такого ряду.

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_l(n)}{(n+\alpha_1)(n+\alpha_2)\ldots(n+\alpha_{m-1})(n+\alpha_m)}, \tag{1}$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ – цілі невід'ємні числа, $0 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m$; $P_l(n)$ – многочлен l-го степеня. Вважатимемо, що $m-l>1$. За такої умови ряд (1) є збіжним, тому природно постає питання знаходження його суми.

Покажемо, як знайти суму ряду (1) за допомогою перетворення Абеля.

Розкладемо загальний член цього ряду на суму елементарних дробів

$$\frac{P_l(n)}{(n+\alpha_1)(n+\alpha_2)\ldots(n+\alpha_{m-1})(n+\alpha_m)} =$$

$$= \frac{A_1}{n+\alpha_1} + \frac{A_2}{n+\alpha_2} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{n+\alpha_{m-1}} + \frac{A_m}{n+\alpha_m}.$$

Невизначені коефіцієнти A_i визначаємо за формулами

$$A_1 = \frac{P_l(-\alpha_1)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)...(\alpha_m - \alpha_1)},$$

$$A_2 = \frac{P_l(-\alpha_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_2)...(\alpha_m - \alpha_2)}, \ldots,$$

$$A_m = \frac{P_l(-\alpha_m)}{(\alpha_1 - \alpha_m)(\alpha_2 - \alpha_m)...(\alpha_{m-1} - \alpha_m)} .$$

Зауважимо, що коефіцієнти $A_1, A_2, ..., A_m$ задовольняють умову:

$$A_1 + A_2 + ... + A_m = 0 .$$

Надалі до виразу

$$\frac{A_1}{n+\alpha_1} + \frac{A_2}{n+\alpha_2} + ... + \frac{A_{m-1}}{n+\alpha_{m-1}} + \frac{A_m}{n+\alpha_m}$$

застосуємо перетворення Абеля.

Нехай $\sigma_m = A_1c_1 + A_2c_2 + ... + A_nc_m$, де $c_i = \dfrac{1}{n+\alpha_i}$, $i = 1, 2, ..., m$.

Позначимо

$$B_k = A_1 + A_2 + ... + A_k, \ k = 1, 2, ..., m .$$

Тоді

$$A_1 = B_1, \quad A_2 = B_2 - B_1, \ \ldots, \quad A_k = B_k - B_{k-1} .$$

Отже,

$$\sigma_m = c_1B_1 + c_2(B_2 - B_1) + ... + c_m(B_m - B_{m-1}) =$$

$$= B_1(c_1 - c_2) + B_2(c_2 - c_3) + B_3(c_3 - c_4) + ... + (c_{m-1} - c_m)B_{m-1} + c_mB_m .$$

З урахуванням того, що $B_m = 0$, маємо

$$\frac{P_l(n)}{(n+\alpha_1)(n+\alpha_2)...(n+\alpha_{m-1})(n+\alpha_m)} = A_1\left(\frac{1}{n+\alpha_1} - \frac{1}{n+\alpha_2}\right) +$$

$$+(A_1 + A_2)\left(\frac{1}{n+\alpha_2} - \frac{1}{n+\alpha_3}\right) + ... + (A_1 + A_2 + ... + A_{m-1})\left(\frac{1}{n+\alpha_{m-1}} - \frac{1}{n+\alpha_m}\right).$$

Тоді частинна сума ряду (1) дорівнює

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_l(k)}{(k+\alpha_1)(k+\alpha_2)...(k+\alpha_m)} = A_1 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+\alpha_1} - \frac{1}{k+\alpha_2}\right) +$$

$$+(A_1 + A_2)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+\alpha_2} - \frac{1}{k+\alpha_3}\right) + ... +$$

$$+(A_1 + A_2 + ... + A_{m-1})\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+\alpha_{m-1}} - \frac{1}{k+\alpha_m}\right) =$$

$$= A_1\left(\sum_{i=1}^{\alpha 2-\alpha 1}\frac{1}{i+\alpha_1}-\sum_{i=1}^{\alpha 2-\alpha 1}\frac{1}{n+\alpha_1+i}\right)+$$

$$+\left(A_1+A_2\right)\left(\sum_{i=1}^{\alpha 3-\alpha 2}\frac{1}{i+\alpha_2}-\sum_{i=1}^{\alpha 3-\alpha 2}\frac{1}{n+\alpha_2+i}\right)+\ldots+$$

$$+\left(A_1+A_2+\ldots+A_{m-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{\alpha m-\alpha m-1}\frac{1}{i+\alpha_{m-1}}-\sum_{i=1}^{\alpha m-\alpha m-1}\frac{1}{n+\alpha_{m-1}+i}\right).$$

Перейдемо до границі частинних сум S_n, коли $n\to\infty$. Матимемо

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=A_1\sum_{i=1}^{\alpha 2-\alpha 1}\frac{1}{i+\alpha_1}+\left(A_1+A_2\right)\sum_{i=1}^{\alpha 3-\alpha 2}\frac{1}{i+\alpha_2}+\ldots+$$

$$+\left(A_1+A_2+\ldots+A_{m-2}\right)\sum_{i=1}^{\alpha m-1-\alpha m-2}\frac{1}{i+\alpha_{m-1}}+$$

$$+\left(A_1+A_2+\ldots+A_{m-1}\right)\sum_{i=1}^{\alpha m-\alpha m-1}\frac{1}{i+\alpha_m}.$$

Як приклад знайдемо суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n-1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+5)}. \qquad (2)$$

Для цього запишемо загальний член заданого ряду у вигляді

$$\frac{n^2+2n-1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+5)}=A_1\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+$$

$$+\left(A_1+A_2\right)\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\left(A_1+A_2+A_3\right)\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+5}\right).$$

Обчислимо значення коефіцієнтів A_1, A_2, A_3 та відповідні суми:

$$P_2(n)=n^2+2n-1;\ \ P_2(-1)=-2,\ P_2(-2)=-1,\ P_2(-3)=2,\ P_2(-5)=14;$$

$$A_1=\frac{-2}{1\cdot 2\cdot 4}=-\frac{1}{4},\ A_2=\frac{-1}{(-1)\cdot 1\cdot 3}=\frac{1}{3},\ A_3=\frac{2}{(-2)\cdot(-1)\cdot 2}=\frac{1}{2};$$

$$A_1+A_2=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{12},\ A_1+A_2+A_3=\frac{1}{12}+\frac{1}{2}=\frac{7}{12}.$$

Отже, загальний член ряду має вигляд

$$\frac{n^2+2n-1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+5)}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+$$

$$+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\frac{7}{12}\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+5}\right).$$

$$\frac{n^2+2n-1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+5)}=-\frac{1}{4}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{n+2}+\frac{1}{2}\frac{1}{n+3}-\frac{7}{12}\frac{1}{n+5}.$$

Тоді частинна сума ряду (2)

$$S_n=-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)+\frac{7}{12}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+5}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)+\frac{7}{12}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{n+4}+\frac{1}{n+5}\right),$$

а сума ряду дорівнює

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=-\frac{1}{8}+\frac{1}{36}+\frac{7}{12}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=\frac{119}{720}.$$

Список літератури

1. Репета В.К., Репета Л.А. Підсумовування числових рядів спеціального вигляду. *Математика в сучасному технічному університеті*. Матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції (м. Київ, 24-25 грудня 2015 року), Київ, 2016. С.205-207.