

Л.М. Іллічева, канд. фіз.-мат. наук, О.П. Томащук, канд. пед. наук
(Національний авіаційний університет, Україна)

Методика застосування програмного пакета «Mathematica» для наближеного розв'язування диференціальних рівнянь

На прикладі реалізації методу Ейлера з екстраполяцією Річардсона показано, що в процесі дистанційного навчання зручно користуватися програмним пакетом «Mathematica» при ознайомленні студентів з класичними чисельними методами розв'язування диференціальних рівнянь

Багато практичних задач приводять до розв'язування диференціальних рівнянь. Більшість із цих рівнянь не вдається розв'язати точними аналітичними методами, а тому доводиться використовувати чисельні (наближені) методи. Використання чисельних методів, як правило, передбачає здійснення значного обсягу обчислень. І тут на допомогу можуть прийти сучасні математичні пакети: Matlab, Maple, Mathematica, MathCad і багато інших. Математичні пакети містять не лише значну кількість вбудованих математичних функцій і бібліотек обчислювальних методів, але й і графічні засоби візуалізації одержаних результатів. Одним із таких пакетів є пакет «Mathematica». За допомогою цього пакета вдається швидко і ефективно розв'язувати задачі лінійної алгебри, дискретної математики, математичного аналізу та диференціальних рівнянь. У пакеті «Mathematica» більшість задач розв'язуються в діалоговому режимі з використанням стандартних операторів та без традиційного програмування. Крім того, в цьому пакеті реалізована мова програмування C++ [1].

Продемонструємо використання пакету «Mathematica» для наближеного розв'язування звичайних диференціальних рівнянь методом Ейлера у поєднанні із процедурою екстраполяції Річардсона.

Метод Ейлера розв'язування звичайного диференціального рівняння. Нехай потрібно розв'язати задачу Коші, тобто знайти такий розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння

$$y' = f(x, y), \quad (1)$$

який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$.

Розв'язати цю задачу чисельним методом – означає, не знаходячи функцію $y = y(x)$, що є розв'язком рівняння (1), для заданої послідовності аргументів $x_0, x_1, \dots, x_n$ та числа y_0 , знайти такі значення $y_1, y_2, \dots, y_n$, що $y_i = y(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) та $y(x_0) = y_0$. Таким чином, чисельні методи дозволяють замість знаходження функції $y = y(x)$, що є розв'язком рівняння (1), отримати таблицю значень цієї функції для заданої послідовності аргументів.

Як відомо, у методі Ейлера наближені значення невідомої функції $y = y(x)$, що є розв'язком рівняння (1), знаходять за формулою:

$$y_i \approx y_{i-1} + h \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}), \quad (2)$$

де $i=1, 2, \dots, n$, $h = \frac{x - x_0}{n}$ – крок процесу.

Порядок похибки методу Ейлера на відрізку $[x_i; x_{i+1}]$ дорівнює h^2 , а на всьому відрізку $[x_0; x]$ – h , тобто метод Ейлера має перший порядок точності. Отже, для підвищення точності в 10 разів (для обчислення одного додаткового десяткового знака) потрібно збільшити кількість точок розбиття також у 10 разів, що значно збільшить обсяг обчислювальної роботи. У цьому полягає основний недолік методу.

Для одержання більш точного розв'язку метод Ейлера поєднують із процедурою екстраполяції Річардсона, яка здійснюється таким чином. Припустимо, що ми використовуємо певний алгоритм, що визначає для математичної задачі розв'язок $F(h)$, похибка якого, порівняно з точним значенням a_0 , пропорційна кроку обчислення h у степені p . Якщо провести розрахунки двічі з різними кроками h і qh , то за допомогою отриманих рівнянь можна знайти точний розв'язок a_0 задачі, навіть якщо кроки обчислень будуть великими:

$$\begin{cases} F(h) = a_0 + a_1 h^p + O(h^r), \\ F(qh) = a_0 + a_1 (qh)^p + O(h^r), \end{cases}$$

$$a_0 = F(h) + \frac{F(h) - F(qh)}{q^p - 1} + O(h^r). \quad (3)$$

Частіше всього покладають $q = \frac{1}{2}$, тобто повторні обчислення роблять

з кроком, що є удвічі меншим [2].

Приклад. Методом Ейлера на відрізку $[0;1]$ і з кроком $h=0,2$ знайти наближений розв'язок диференціального рівняння $y' = 3 + 2x + y$, що задовольняє початкову умову $y(0)=2$. Зменшивши крок h удвічі, використати процедуру Річардсона. Одержаний розв'язок порівняти з точним.

Розв'язання. Обчислення проведемо за формулою (2), використовуючи пакет «Mathematica»:

```
f[x_, y_] := 3 + 2 x + y;
a = 0;
b = 1;
h = 0.2;
M = IntegerPart[(b - a) / h];
|целая часть
x = 0;
y = 2; dy = h * f[x, y];
U[0] = y + dy;
Do [x = x + h; y = U[j]; dy = h * f[x, y]; U[j + 1] = U[j] + dy, {j, 0, M - 1}]
|оператор цикла
Array[U, M, 0]
|массив
```

|j]= {3., 4.28, 5.896, 7.9152, 10.4182}

Зменшимо крок h удвічі, тобто покладемо $h=0,1$, і знову за формулами (2), використовуючи пакет «Mathematica», знайдемо наближений розв'язок:

```
f[x_, y_] := 3 + 2 x + y;
a = 0;
b = 1;
h = 0.1;
M = IntegerPart[(b - a) / h];
|целая часть
x = 0;
y = 2; dy = h * f[x, y];
U[0] = y + dy;
Do [x = x + h; y = U[j]; dy = h * f[x, y]; U[j + 1] = U[j] + dy, {j, 0, M - 1}]
|оператор цикла
Array[U, M, 0]
|массив
{f,}= {2.5, 3.07, 3.717, 4.4487, 5.27357, 6.20093, 7.24102, 8.40512, 9.70563, 11.1562}
```

Далі скористаємося процедурою екстраполяції Річардсона. Для цього використаємо формулу (3), в якій покладемо $q = \frac{1}{2}$ і врахуємо, що для методу Ейлера порядок точності $p=1$:

```
Out[ ]:= {3., 4.28, 5.896, 7.9152, 10.4182}
Out[ ]:= {2.5, 3.07, 3.717, 4.4487, 5.27357, 6.20093, 7.24102, 8.40512, 9.70563, 11.1562}

In[ ]:= x = 0; y = 2;
x1 = 0.2; y1 = 2 + 3.07 - 3
Out[ ]:= 3.14

In[ ]:= x2 = 0.4; y2 = 2 + 4.4487 - 4.28
Out[ ]:= 4.6174

In[ ]:= x3 = 0.6; y3 = 2 + 6.20093 - 5.896
Out[ ]:= 6.50586

In[ ]:= x4 = 0.8; y4 = 2 + 8.40512 - 7.9152
Out[ ]:= 8.89504

In[ ]:= x5 = 1; y5 = 2 + 11.1562 - 10.4182
Out[ ]:= 11.8942
```

Щоб порівняти одержаний наближений розв'язок з точним, за допомогою пакета «Mathematica» знайдемо функцію, що є розв'язком заданого диференціального рівняння і задовольняє початкову умову $y(0)=2$, та обчислимо значення цієї функції в точках $x=0$, $x=0,2$, $x=0,4$, $x=0,6$, $x=0,8$, $x=1$:

```

In[1]:= DSolve [D[y[x], x] == 3 + 2 x + y[x], y[x], x]
Out[1]:= {{y[x] -> -5 - 2 x + e^x c1}}

In[2]:= DSolve [{D[y[x], x] == 3 + 2 x + y[x], y[0] == 2}, y, x]
Out[2]:= {{y -> Function[{x}, -5 + 7 e^x - 2 x]}}

In[3]:= x0 = 0; h = 0.2; Do[x = x0 + (i - 1) * h; V[i] = -5 + 7 * E^(x) - 2 x, {i, 6}]
Array[V, 6, 1]

Out[4]:= {2., 3.14982, 4.64277, 6.55483, 8.97879, 12.028}

```

Як бачимо, наближений розв'язок, знайдений за процедурою Річардсона, незначно відрізняється від точного.

Зауважимо, що за наведеним зразком студенти при дистанційному навчанні можуть самостійно виконувати подібні завдання з використанням пакета «Mathematica», порівнюючи наближені розв'язки із знайденими точними.

Висновок. Наведений підхід демонструє, що математичний пакет «Mathematica» є зручним у використанні при дистанційній формі навчання. З його допомогою вдається не тільки швидко опанувати методику обчислень, але й перевірити знайдені результати.

Список літератури

1. Дьяконов В.П. Mathematica 5/6/7. Полное руководство. – М.: ДМК Пресс, 2010. – 624 с.
2. Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А. Чисельні методи в інформатиці. – К.: Видавнича група BVH, 2006. – 480 с.