УДК 517.958

П.Ф. Жук, Л.М. Іллічева, П.Ю. Митрохін, О.В. Герасимчук
(Національний авіаційний університет, Україна)
Т.В. Авдєєва
(Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»)

Математична модель оберненої задачі калориметрії

Побудована математична модель калориметричної системи при умові, що капсула та зовнішній циліндр системи мають різні фізико-хімічні властивості. На її основі сформулювана обернена задача калориметрії. Показано, що математичною моделлю оберненої задачі калориметрії є інтегральне рівняння Вольтерри першого роду.

Постановка оберненої задачі калориметрії

В тепловій енергетиці України існує гострий дефіцит сучасних універсальних засобів вимірювання теплоти згоряння палива, що надходить на котельні установки та теплоелектростанції. Завдання із розробки математичного та програмного забезпечення процесу обробки результатів вимірювань калориметричними системами слугує підвищенню точності і швидкодії визначення калорійності палива та автоматизації процесу вимірювання.

Для математичного моделювання процесу розповсюдження тепла у капсулі калориметра та у зовнішньому циліндрі використовуємо одновимірне рівняння теплопровідності в циліндричній системі координат [1].

Враховуємо умови теплообміну на осі калориметра, на межі капсули та зовнішнього циліндра і на боковій стороні зовнішнього циліндра, для побудови крайової умови при використовуємо диференціальний наслідок з рівняння теплопровідності [2].

В результаті отримуємо початково-крайову задачу для системи двох диференціальних рівнянь в частинних похідних параболічного типу.

$$c_1\rho_1\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda_1\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+F(r,t), \qquad 0<r<R_1, \tag{1}$$

$$r\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=0}=0,\ \lambda_1\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=R_1-0}=\lambda_2\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=R_1+0}, \tag{2}$$

$$T(R_1,t)=T^*(t), \tag{3}$$

$$c_2\rho_2\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda_2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right), \quad R_1<r<R_2, \tag{4}$$

$$T(R_2,t)=0, \qquad\qquad t\ge 0, \tag{5}$$

$$T(r,0)=0,\ 0\le r\le R_2\,, \tag{6}$$

де

$$F(r,t)=\begin{cases} f(t), & 0\le r<r_1,\\ 0, & r_1\le r<R_1.\end{cases} \tag{7}$$

Система рівнянь (1) – (7) і є математичною моделлю калориметра при умові, що джерела тепла розташовані однорідно як по довжині, так і по радіусу капсули, та енергетично еквівалентні. Тут $T(r,t)$ – температура (в цельсиях) в точці, віддаленої від центра калориметра на відстань r в момент часу t, $F(r,t)$ – щільність джерел (або стоків) тепла, що розташовані в калориметрі (в капсулі дорівнює $f(t)$ і не залежить від r, у другому (зовнішньому) циліндрі калориметра вона дорівнює нулю).

Обернена задача калориметрії: необхідно по відомій функції температури $T^*(t)$ на поверхні капсули визначити функцію $f(t)$, яка є об'ємною щільністю джерел тепла в капсулі.

Математична модель оберненої задачі калориметрії

Перший етап. Обчислимо щільність потоку $q(t)$ тепла на границі між середовищами при відомій функції $T^*(t)$. Для цього розв'язуємо початково-крайову задачу для рівняння теплопровідності в циліндричній системі координат:

$$c_2\rho_2\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda_2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right),\qquad R_1<r<R_2\,, \tag{8}$$

$$T\left(r,0\right)=0,\ T\left(R_1,0\right)=T^*(t),\ T\left(R_2,0\right)=0\,. \tag{9}$$

Методом відокремлення змінних отримуємо розв'язок задач (8) – (9) у вигляді:

$$T\left(r,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n D_n\left(t\right)V_n\left(r\right)-T^*\left(t\right)\frac{\ln\left(r/R_2\right)}{\ln\left(R_2/R_1\right)}\,, \tag{10}$$

де

$$\psi_n=\frac{\pi J_0\left(\mu_n R_1\right)J_0\left(\mu_n R_2\right)}{J_0^2\left(\mu_n R_1\right)-J_0^2\left(\mu_n R_2\right)}\,, \tag{11}$$

$$D_n\left(t\right)=T^*\left(t\right)-k_2\mu_n^2\int_0^t e^{-k_2\mu_n^2\left(t-\tau\right)}T^*\left(\tau\right)d\tau\ ,$$

$$V_n(r)=J_0\left(\mu_n r\right)Y_0\left(\mu_n R_2\right)-J_0\left(\mu_n R_2\right)Y_0\left(\mu_n r\right),$$

а $k_2 = \dfrac{\lambda_2}{c_2\rho_2}$, μ_n - n -й додатній корінь рівняння

$$J_0\left(\mu R_1\right)Y_0\left(\mu R_2\right) - J_0\left(\mu R_2\right)Y_0\left(\mu R_1\right) = 0\,,$$

$J_0\left(x\right)$ – функція Бесселя 1-го роду нульового порядку, $Y_0\left(x\right)$ – функція Бесселя 2-го роду нульового порядку. Наведене рівняння має зліченне кількість простих додатних коренів μ_n, тому наведені вирази існують і можуть бути легко підраховані.

Знаходимо формулу для щільність потоку $q(t)$ тепла на границі між середовищами:

$$q\left(t\right) = -\lambda_2 \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R_1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n D_n\left(t\right) + \frac{\lambda_2 T^*\left(t\right)}{R_1 \ln\left(R_2 / R_1\right)}\,,$$

де коефіцієнти a_n обчислюються за формулою:

$$a_n = \frac{2\lambda_2 J_0^2\left(\mu_n R_2\right)}{R_1\left(J_0^2\left(\mu_n R_1\right) - J_0^2\left(\mu_n R_2\right)\right)}\quad .$$

Другий етап. На другому етапі розв'язуємо неоднорідну початково-крайову задачу для рівняння теплопровідності в капсулі калориметра у припущенні що потік $q(t)$ тепла на границі між середовищами відомий. У циліндричній системі координат ця задача має вигляд:

$$c_1\rho_1 \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_1 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + F(r,t)\,, \qquad 0 < r < R_1\,,$$

$$r\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0} = 0,\ -\lambda_1\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R_1} = q(t), \quad T(r,0) = 0, \quad 0 \le r \le R_1\,,$$

де

$$F(r,t) = \begin{cases} f(t), & 0 \le r < r_1, \\ 0, & r_1 \le r < R_1. \end{cases}$$

Визначимо температуру при $r = R_1$:

$$T^*\left(t\right) = -\frac{2}{R_1 c_1 \rho_1}\int_0^t q(\tau)d\tau + \frac{r_1^2}{R_1^2}\int_0^t f_1(\tau)d\tau +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{R_1 c_1 \rho_1}\int_0^t e^{-k_1\alpha_n^2(t-\tau)} q(\tau)d\tau + \frac{2r_1 J_1(\alpha_n r_1)}{\alpha_n R_1^2 w_n(R_1)}\int_0^t e^{-k_1\alpha_n^2(t-\tau)} f_1(\tau)d\tau\right) \qquad (12)$$

де

$$K_1(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k_1\alpha_n^2 t}, \quad M(t) = \frac{r_1^2}{R_1^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2r_1 J_1(\alpha_n r_1)}{\alpha_n R_1^2 w_n(R_1)} e^{-k_1\alpha_n^2 t}.$$

Вираз (12) можна переписати у вигляді

$$T^*(t) = -\frac{2}{R_1 c_1 \rho_1} \int_0^t K_1(t-\tau) q(\tau) d\tau + \int_0^t M(t-\tau) f_1(\tau) d\tau .$$

Третій етап. Виведення інтегрального рівняння Вольтери першого роду. Отримаємо рівняння відносно функції щільності джерел тепла, розташованих в капсулі калориметра

$$\int_0^t M(t-\tau) f(\tau) d\tau = \Phi(t), \tag{13}$$

де

$$\Phi(t) = T^*(t) + \frac{2}{R_1 c_1 \rho_1} \int_0^t K_1(t-\tau) \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n D_n(t) + \frac{\lambda_2 T^*(t)}{R_1 \ln(R_2 / R_1)} \right] d\tau . \tag{14}$$

Висновок. Таким чином, розв'язання оберненої задачі калориметрії зводиться до розв'язання інтегрального рівняння Вольтерри першого роду (13) відносно невідомої функції $f(t)$ та з правою частиною (14). Ядро $M(t)$ рівняння (13) є слабосингулярним. Рівняння (13) відноситься до некоректних задач. Для його числового розв'язання використовують методи регуляризації.

Список літератури

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: учеб. пособие. - 6-е изд. - М.: Изд-во МГУ, 1999. 799 с.
2. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике // М.: Наука, 1979. - 685 с.