

*В.Г. Вербицький, д. ф.-м. н., А.І. Безверхий  
(Запорізький національний університет, Україна)*

*В.Г. Хребет, к. ф.-м. н., О.П. Томащук, к. пед. н.  
(Національний авіаційний університет, Україна)*

*І.В. Цідило, к. ф.-м. н.*

*(Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, Україна)*

### До аналізу задачі Річарда Фейнмана про рух кулісного механізму

*Представлено альтернативне розв'язання задачі про рух кулісного механізму, яка була розглянута в книзі видатного науковця і педагога Р. Фейнмана «Фейнманівські задачі з фізики». Представлений у роботі аналіз руху простого механізму може слугувати прикладом міждисциплінарних зв'язків, які охоплюють точні фізико-математичні та прикладні науки.*

#### До історії задачі.

Умови рівноваги моделі (ілюструють важливість вмінь роботи з векторами) були розглянуті на простому прикладі [1, с. 53-58].

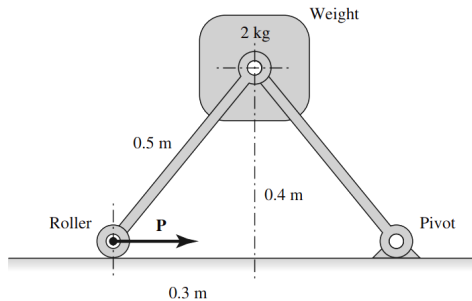


Рис. 1. Кулісний механізм

В аналізі Р. Фейнмана руху моделі кулісного механізму використовувався цікавий синтетичний підхід, пов'язаний зі зміною повної механічної енергії [1]: A problem in machine design (p.73-83).

Альтернативне розв'язання М.А. Готліба відображає більш формалізований підхід на основі положень теоретичної механіки [1]: Alternate Solutions by Michael A. Gottlieb (p.87-89).

Запропонований в роботі підхід до аналізу динаміки кулісного механізму також можна віднести до загально прийнятого в теоретичній механіці, але ми намагалися донести при цьому важливі з точки зору самоконтролю положення, які допомагають усвідомити справедливості отриманих результатів, та проілюструвати важливість залучення до навчального процесу можливостей пакету аналітичних перетворень Maple V Release 4 (вільному доступі) [2].

#### Частина 1.

> restart:  
 #1.STATIC  
 > #Яку горизонтальну силу  $F_A$  необхідно прикласти до лівої опори куліси в точці "А", щоб забезпечити рівновагу системи. В з'єднувальному шарнірі "С" на систему діє вертикальна сила  $P$ , опори невагомі (рис.2).

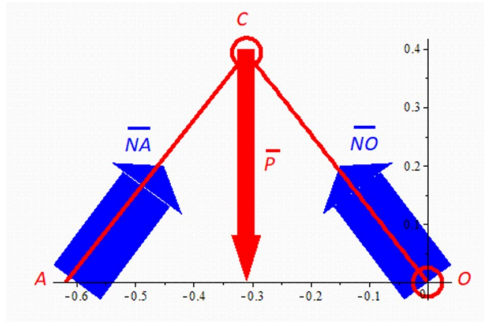


Рис. 2. Розрахункова схема для визначення статистичних реакцій

> # Розв'язання:  
 > #Реакції  $NA$ ,  $NO$  діють вздовж відрізків  $AC$  та  $OC$  (згідно аксіоми про дві сили)

> #Ox:

> e1:= NA\*cos(theta)-NO\*cos(theta)=0;

$$e1 := NA \cos(\theta) - NO \cos(\theta) = 0$$

> #Oy:

> e2:= NA\*sin(theta)+NO\*sin(theta)-P=0;

$$e2 := NA \sin(\theta) + NO \sin(\theta) - P = 0$$

> solve({e1,e2},{NA, NO});

$$\left\{ NA = \frac{1}{2} \frac{P}{\sin(\theta)}, NO = \frac{1}{2} \frac{P}{\sin(\theta)} \right\}$$

> FA:=NA\*cos(theta);

$$FA := NA \cos(\theta)$$

## Частина 2.

Рух куліси під дією сили, що забезпечує постійну швидкість точки «А».

#2.  $VA=const$ ;

> #Яку горизонтальну силу  $F_A$  необхідно прикласти до лівої опори куліси, щоб забезпечити сталу швидкість прослизання точки А.

В з'єднувальному шарнірі на систему діє вертикальна сила  $P$ , опори невагомі (рис.3).

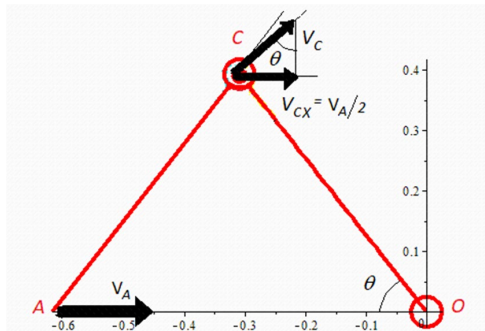


Рис.3. Розрахункова схема для визначення кінематичних характеристик  
> theta0:=arctan(4/3);

$$\theta := \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

> # візуалізація руху куліси;

> with(plots):

```
>#animate([[-cos(t)*0.5*phi/(2*Pi),sin(t)*0.5*phi/(2*Pi),phi=0..2*Pi],
[0.025*sin(phi),0.025*cos(phi),phi=0..2*Pi],[-0.5*cos(t)-0.025*sin(phi),
0.5*sin(t)-0.025*cos(phi),phi=0..2*Pi],[-cos(t)-cos(Pi-t)*0.5*phi/(2*Pi),
sin(Pi-t)*0.5*phi/(2*Pi),phi=0..2*Pi]],t=theta0..Pi/2,frames=100,
color=red, style=line, thickness=4,scaling=constrained);
```

> # Розв'язання:

> # Визначення швидкості та прискорення точки C:

> # xc= xa/2 => vcx=va/2; vc=va/(2\*sin(theta));

eps=-v^2\*cos(theta)/(4\*l^2\*sin(theta)^3);

> VC:=VA/(2\*sin(theta));

$$VC := \frac{1}{2} \frac{VA}{\sin(\theta)}$$

> omega:=VC/l;

$$\omega := \frac{1}{2} \frac{VA}{\sin(\theta) l}$$

> EPS:=-VA^2\*cos(theta)/(4\*l^2\*sin(theta)^3);

$$EPS := -\frac{1}{4} \frac{VA^2 \cos(\theta)}{l^2 \sin(\theta)^3}$$

> at:=EPS\*1;

$$at := -\frac{1}{4} \frac{VA^2 \cos(\theta)}{l \sin(\theta)^3}$$

> an:=VC^2/l;

$$an := \frac{1}{4} \frac{VA^2}{\sin(\theta)^2 l}$$

> # Проекція прискорення точки C на вісь ординат:

> DDyc:=at\*cos(theta)-an\*sin(theta);

$$DDyc := -\frac{1}{4} \frac{VA^2 \cos(\theta)^2}{l \sin(\theta)^3} - \frac{1}{4} \frac{VA^2}{\sin(\theta) l}$$

> simplify(-(1/4)\*VA^2\*cos(theta)^2/(l\*sin(theta)^3)-(1/4)\*VA^2/(sin(theta)\*l));

$$DDyc := -\frac{1}{4} \frac{VA^2}{l \sin(\theta)^3}$$

> # Vcx=const => рівнодійна сил інерції напрямлена вздовж осі ординат (рис.4).

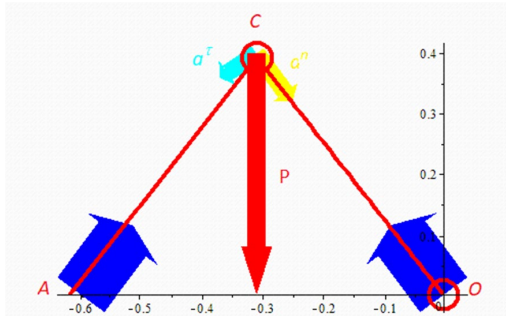


Рис. 4. Розрахункова схема для визначення динамічних реакцій опор

> #Відповідно до принципу Д'аламбера додамо до активних сил та реакцій опор **NA**, **NO** сили інерції, сукупність яких утворює врівноважену систему сил (реакції опор **NA**, **NO** діють вздовж відрізків **AC** та **OC** відповідно).

> #Ox:

> e1:=NA\*cos(theta)-NO\*cos(theta)=0;

$$e1 := NA \cos(\theta) - NO \cos(\theta) = 0$$

> #Oy:

> e2:=NA\*sin(theta)+NO\*sin(theta)-P-m\*DDyc=0;

$$e2 := NA \sin(\theta) + NO \sin(\theta) - P + \frac{1}{4} \frac{m VA^2}{l \sin(\theta)^3} = 0$$

> solve({e1,e2},{NA,NO});

$$\left\{ NA = \frac{1}{8} \frac{4Pl \sin(\theta)^3 - m VA^2}{\sin(\theta)^4 l}, NO = \frac{1}{8} \frac{4Pl \sin(\theta)^3 - m VA^2}{\sin(\theta)^4 l} \right\}$$

> NA:=(1/8)\*(4\*P\*l\*sin(theta)^3-m\*VA^2)/(sin(theta)^4\*l);

$$NA := \frac{1}{8} \frac{4Pl \sin(\theta)^3 - m VA^2}{\sin(\theta)^4 l}$$

> # Диференціальне рівняння для визначення кута theta як функції часу:

```

> dsolve(diff(THETA(t),t)=VA/(2*1*sin(THETA(t))),THETA(t));
> THETA(t):= Pi-arccos(2*t+2*_C1);
      THETA(t) := π - arccos(2 t + 2 _C1)
> _C1:=solve(TETA0=subs(t=0,THETA(t)),_C1);
      _C1 := -1/2 cos(TETA0)
> theta:=Pi-arccos(2*t+2*(-1/2)*cos(theta0));
      θ := π - arccos(2 t - 3/5)
> #S:=sqrt(1-(cos(theta0)-2*t)^2);
      S := 2/5 √(-25 t^2 + 15 t + 4)
> NA:=m*(g-1*VA^2/S^3)/(2*S);
      NA := 5/2 * (9.81 - (-25 t^2 + 15 t + 4)^{3/2}) / √(-25 t^2 + 15 t + 4)

```

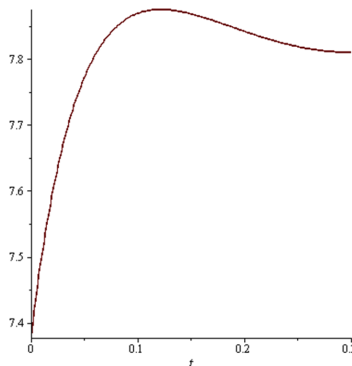


Рис.5. Графік динамічних реакцій як функції часу

### Висновок

Наведений у роботі аналіз кулісного механізму може бути перенесений на випадок мехатронної системи подібної схеми, яку можна б було використовувати у якості спеціалізованої робототехнічної системи з відповідним механічним приводом, що забезпечує її рух по прямолінійним направляючим.

### Список літератури

1. Feynman's Tips on Physics (2nd ed.). Richard P.Feynman, Michael A.Gottlieb, Ralph Leighton. – NY: Basic Books, 2013. – 197 p.
2. Вербицький В.Г., Безверхий А.І., Михайлюк І.Р., Цідило І.В. Моделювання стійкості руху матеріальних об'єктів в середовищі Maple: навчальний посібник. Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2021. – 120 с.