

О.М. Багно, д.ф.-м.н., Г.І. Шурук, к.ф.-м.н.
(Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Україна)

Умови генерування квазілембових мод у пружному шарі, який взаємодіє з півпростором ідеальної стисливої рідини

На основі тривимірних лінійних рівнянь класичної теорії пружності для твердого тіла та лінеаризованих рівнянь Ейлера для рідкого середовища досліджено поширення квазілембових хвиль у системі: півпростір ідеальної стисливої рідини – пружний шар. Встановлені умови, при яких існують квазілембові моди в гідропружних хвильоводах.

Постановка задачі.

Розглянуто задачу про поширення гармонічних хвиль у гідропружній системі, що складається з півпростору ідеальної стисливої рідини та пружного шару. Розв'язок отримано із залученням тривимірних лінійних рівнянь класичної теорії пружності для твердого тіла та лінеаризованих рівнянь Ейлера для рідини, яка перебуває у стані спокою. У рамках прийнятих моделей основні співвідношення для системи: пружне тіло – ідеальна стислива рідина мають вигляд [1–3]:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2 \quad (4)$$

$$P_{ij} = -\delta_{ij} p; \quad a_0 = \text{const} \quad (5)$$

Вище прийняті такі позначення: u_i – компоненти вектора зсувів пружного тіла $\mathbf{u}$; ρ – густина матеріалу пружного шару; $\mathbf{v}$ – вектор збурень швидкості рідини відносно стану спокою; ρ^* і p – збурення густини і тиску в рідині; ρ_0 і a_0 – густина рідини і швидкість звуку в рідині в стані спокою; λ і μ – константи Ляме матеріалу пружного тіла; P_{ij} і σ_{ij} – складові напружень в рідині та пружному тілі, відповідно.

Рівності (1, 2) описують поведінку пружного тіла. Малі коливання ідеальної стисливої рідини, яка перебуває в стані спокою, описують співвідношення (3 – 5). Зазначена задача зводиться до розв'язання системи рівнянь (1) – (5) при наступних граничних умовах, які задаються на поверхні

контакту пружного тіла і рідини ($z_2 = 0$), а також на вільній поверхні пружного шару ($z_2 = h$).

$$\sigma_{12} \Big|_{z_2=h} = 0; \quad \sigma_{22} \Big|_{z_2=h} = 0; \quad \sigma_{12} \Big|_{z_2=0} = 0 \quad (6)$$

$$\sigma_{22} \Big|_{z_2=0} = P_{22} \Big|_{z_2=0}; \quad v_2 \Big|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{z_2=0} \quad (7)$$

Вище прийняті такі позначення: v_2 – нормальна складова вектора збурень швидкості рідини; h – товщина пружного шару; z_1 і z_2 – позовжня і поперечна координати, відповідно.

Для аналізу поширення збурень, гармонічно змінних у часі, розв’язки системи рівнянь визначаємо в класі біжучих хвиль.

Далі розв’язано дві задачі на власні значення для рівнянь руху рідини та пружного тіла, а також визначено відповідні власні функції. Після підстановки загальних розв’язків у граничні умови (6 – 7) отримано систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь щодо довільних сталих. Виходячи з умови існування нетривіального розв’язку цієї системи, отримано дисперсійне рівняння

$$\det \| e_{lm} (c, \lambda, \mu, \rho, \rho_0, a_0, \omega h / c_s) \| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 5}), \quad (7)$$

де c – фазова швидкість хвиль в гідропружній системі; ω – кругова частота; c_s – швидкість хвилі зсуву в матеріалі пружного тіла ($c_s^2 = \mu / \rho$); μ – модуль зсуву матеріалу пружного шару.

Аналіз результатів розрахунків.

Надалі дисперсійне рівняння (7) розв’язувалося чисельно. В результаті чисельного розв’язання динамічної лінеаризованої задачі гідропружності про поширення акустичних хвиль у пружно-рідинній системі досліджено кінематичні, дисперсійні та локалізаційні властивості хвильового процесу. Проведено розрахунки та виконано аналіз отриманих числових результатів, які показали, що співвідношення між швидкостями хвилі звуку в рідині та хвилі Релея в пружному тілі може бути умовою генерування нормальних квазілембових мод у пружному шарі, що взаємодіє з півпростором ідеальної стисливої рідини.

У випадку, коли швидкість хвилі звуку в рідині більша за швидкість квазіповерхневої хвилі Релея в пружному шарі рідина не перешкоджає обміну енергією між поверхнями пружного шару. При цьому відбувається взаємодія позовжньої та зсувної хвиль на поверхнях пружного шару та виникнення в ньому повного набору незатухаючих нормальних квазілембових мод вищого порядку.

За умови, коли швидкість хвилі звуку в рідині менша за швидкість квазіповерхневої хвилі Релея в пружному тілі рідина перешкоджає обміну енергією між поверхнями пружного шару. У цьому випадку в пружному шарі не формуються нормальні квазілембові хвилі. У гідропружному хвилеводі виникає лише одна нижча мода, яка, поширюючись вздовж межі контакту середовищ, локалізується у приповерхневій ділянці рідини.

Висновки

Виконано математичне моделювання хвильового процесу в гідропружній системі: півпростір ідеальної стисливої рідини – пружний шар. Встановлено, що, при умові, коли швидкість хвилі звуку в рідині менша за швидкість квазіповерхневої хвилі Релея в пружному шарі, нижчі моди проникають у тверде тіло і так само, як і моди вищого порядку, поширюються в пружному шарі. При цьому пружний шар є визначальним у формуванні хвильового поля і основним хвилеводом, по якому поширюються хвильові збурення і здійснюється перенесення більшої частини енергії хвиль.

У випадку, коли швидкість хвилі звуку в рідині менша за швидкість квазіповерхневої хвилі Релея в пружному шарі, існує єдина мода, яка не проникає у тверде тіло і поширюється вздовж межі контакту середовищ, переважно, у приповерхневій ділянці рідини. У цьому випадку хвилеводом для поширення квазіповерхневої хвилі (хвиля типу Стоунлі-Шольте) та перенесення хвильової енергії слугує приповерхнева область рідкого півпростору.

Список літератури

1. Гузь А. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в двух частях. Ч. 1. Общие вопросы. Волны в бесконечных телах и поверхностные волны. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 501 с.
2. Гузь А. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в двух частях. Ч. 2. Волны в частичноограниченных телах. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 505 с.
3. Гузь А.Н. Ведение в динамику сжимаемой вязкой жидкости. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2017. – 244 с.