УДК 519.2

Т.В. Авдєєва
(НТУУ «Київський політехнічний університет імені Ігоря Сікорського)
Л.М. Іллічева, к.ф.-м.н.
(Національний авіаційний університет, Україна)

Оцінювання нижніх границь середньоквадратичних похибок у задачах із невідомим параметром

Представлені випадки оцінювання знизу середньоквадратичної похибки у задачах із невідомим параметром.

Постановка задачі оцінювання невідомого параметра

Нехай у деякому ймовірнісному просторі (Ω,F,P) заданий випадковий процес $(\theta, \xi) = (\theta_t, \xi_t), t \geq 0,$ для якого може спостерігатися тільки друга компонента $\xi = (\xi_t), t \geq 0$. У кожній момент часу t необхідно, спираючись на спостереження $\xi_0^t = \{\xi_s\ ,\ 0 \leq s \leq t\}$, оцінювати значення θ_t, яке не спостерігається. Тобто, треба виконувати оцінювання (фільтрацію) θ_t по ξ_0^t.

Відомо, якщо $M\theta_t^2 < \infty$, то оптимальною у середньоквадратичному сенсі оцінкою θ_t по ξ_0^t є апостреріорне середнє $m_t = M\left(\theta_t | F_t^\xi\right)$, де $F_t^\xi = \sigma\{\omega: \xi_s\ ,\ 0 \leq s \leq t\}$ – σ – алгебра, яка породжується величинами ξ_0^t. Рішення задачі оптимальної фільтрації зводиться до знаходження умовних математичних сподівань $m_t = M\left(\theta_t | F_t^\xi\right)$.

Із обчислювальної точки зору бажано, щоб формули, які «визначають» фільтр m_t, t ≥ 0 мали рекурентний характер.

Розглянемо задачу оцінювання невідомого параметру $\theta, -\infty < 0 < \infty$, а загалом – функції $f = f(\theta)$, яка оцінюється за результатами спостережень за випадковим процесом

ξ =$(\xi_t\ ), t \geq 0$, який має диференціал: $d\xi_t = a_t(\theta, \xi)dt + dW_t, \quad \xi_0 = 0$

Вимірний функціонал $\{a_t(\theta, x),\ t \geq 0, -\infty < \theta < \infty,\ x \epsilon C\},\ C -$ множина неперервних функцій; $W = (W_t, F_t),\ t \geq 0 -$ вінерівський процес. Випадковий процес $W = (W_t, F_t),\ t \geq 0$ називається вінерівським (по відношенню до сімейства $F = \left((F_t), t \geq 0\right)$, де $\left((F_t), t \geq 0\right)) -$ неспадне сімейства σ – алгебр, якщо:

1) траєкторії $W_t, t \geq 0$, неперервні по t, причому P – майже ймовірно (м.йм.);

2) $W = (W_t, F_t),\ t \geq 0$ є квадратично інтегровним мартингалом з $W_0 = 0$ і $M[(W_t - W_s)^2 | F_s] = t - s,\ t \geq s.$

Вимірний функціонал $\{a_t(\theta, x),\ t \geq 0, -\infty < \theta < \infty,\ x \epsilon C\}$ при кожному фіксованому θ вважається $B_t -$ вимірним при кожному $t \geq 0,$ де $B_t = \sigma\{x: x_s\ ,\ s \leq t\} - \sigma$ – підалгебри у вимірному просторі $(C, B) -$

неперервних функцій $x = (x_t), t \geq 0$ з $x_0 = 0$ (тобто, є не попереджаючим функціоналом).

Нехай $\tau = \tau(x) -$ марківський момент відносно системи $(B_t), t \geq 0, \delta = (\delta(t, x)) -$ прогресивно вимірний (і, як наслідок , не є попереджаючим) дійсний процес, визначений на (C, B). Випадкова величина (F – вимірна функція) $\tau = \tau(\omega)$, яка приймає значення в $\bar{T} = [0, \infty]$ називається марківським моментом (відносно системи $F = ((F_t),\ t \in T)$, якщо для кожного t$\in T$, $\{\omega: \tau(\omega) \leq t\} \in F_t$. Марківські моменти також називають випадковими величинами, які не залежать від майбутнього.

Випадковий процес $X = \{\xi_t\}, t \in T$ назвивається вимірним, якщо для довільних борелівських множин B числової прямої R^1виконується: $\{(\omega, t): \xi_t(\omega) \in \mathrm{B}\} \epsilon F \times \mathrm{B}(T)$, де B(T) - $\sigma -$ алгебра борелівських множин на T= $[0, \infty)$.

Випадковий процес $X = \{\xi_t\}, t \in T$ назвивається прогресивно вимірним, якщо для кожного t$\in T$ $\{(\omega, s \leq t): \xi_s(\omega) \in \mathrm{B}\} \epsilon F_t \times \mathrm{B}([0, t])$, де B – борелівські множини на R^1, $\mathrm{B}([0, T]) - \sigma -$ алгебра борелівських множин на $[0, t]$. Відомості про пару функцій $\Delta = (\tau, \delta)$, які складають послідовний план оцінювання дозволяють одержати оцінку знизу для величини $\mathrm{M}[f(\theta) - \delta(\tau, \xi)]^2$.

Теорема про оцінювання невідомого параметра

Нехай $\mu_W, \mu_\xi^\theta -$ міри у просторі (C, B), які відпвідають вінерівському процесу W і процесу ξ із наведеним вище диференціалом $d\xi_t$ для $-\infty < \theta < \infty$.

Нехай

$$\text{а) } \int_0^\infty |a_t(\theta, x)| dt < \infty \quad (\mu_W, \mu_\xi^\theta - \text{м. йм.}), -\infty < \theta < \infty$$

$$\text{б) } \int_0^{\tau(x)} |a_t{}^2(\theta, x)| dt < \infty \quad (\mu_W, \mu_\xi^\theta - \text{м. йм.}), -\infty < \theta < \infty,$$

З умов а),б) випливає, що при кожному θ міри μ_W, μ_ξ^θ еквівалентні і щільність $\varphi(\theta, W) = \frac{d\,\mu_\xi^\theta}{d\mu_W}(\tau(W), W)$ задається формулою:

$$\varphi(\theta, W) = exp\left\{\int_0^{\tau(W)} a_t(\theta, W) dW_t - \frac{1}{2}\int_0^{\tau(W)} a_t^2(\theta, W) dt\right\}$$

Припустимо також, що

в) при кожному $t \geq 0, x \in C$ функція $a_t(\theta, x)$ диференційована по θ та

$$\int_0^{\tau(W)} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} a_t(\theta, W)\right]^2 dt < \infty \quad (P - \text{м. йм.}),\ -\infty < \theta < \infty,$$

$$0 < M \int_0^{\tau(\xi)} \left[\frac{\partial}{\partial t} a_t(\theta, W)\right]^2 dt < \infty, -\infty < \theta < \infty,$$

г) $\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\tau(W)} a_t(\theta,W)dW_t = \int_0^{\tau(W)} \frac{\partial}{\partial t} a_t(\theta,W)dW_t$, $(P-$ м.йм.$), -\infty < \theta < \infty$

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\int_0^{\tau(\mathrm{W})} a_t^2(\theta,\mathrm{W})\mathrm{dW_t} = 2\int_0^{\tau(\mathrm{W})} a_t(\theta,W)\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}a_t(\theta,\mathrm{W})\,\mathrm{dW_t}, (\mathrm{P}-\text{м.йм.}), -\infty < \theta < \infty$$

д) для функції $f(\theta)$ та $\mathrm{b}(\theta) = M\delta(\tau(W),W)\varphi(\theta,W) - f(\theta)$ дифереційовні по θ та $=$

$$\frac{d}{d\theta}[b(\theta)+f(\theta)] = M\delta(\tau(W),W)\frac{\partial\varphi(\theta,W)}{\partial\theta},$$

Можна стверджувати, що при розгляді послідовного плана оцінювання $\Delta = (\tau,\delta)$ з $M\delta^2(\tau,\xi) < \infty$, для кожного $-\infty < \theta < \infty$ при виконанні умов а)-д) для кожного $-\infty < \theta < \infty$:

$$M[f(\theta)-\delta(\tau,\xi)]^2 \geq \frac{\left(\frac{d}{d\theta}[b(\theta)+f(\theta)]\right)^2}{M\int_0^{\tau(\xi)}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}a_t(\theta,\xi)\right]^2 dt} + b^2(\theta)$$

Як наслідок, якщо план $\Delta = (\tau,\delta)$ є незміщеним, тобто $\mathrm{b}(\theta) = M\delta(\tau,\xi) - f(\theta) \equiv 0$ для усіх $-\infty < \theta < \infty$, то

$$M[f(\theta)-\delta(\tau,\xi)]^2 \geq \frac{\left(\frac{d}{d\theta}\,f(\theta)\right)^2}{M\int_0^{\tau(\xi)}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}a_t(\theta,\xi)\right]^2 dt}$$

У частковому випадку, коли $f(\theta) \equiv \theta$, то

$$M[f(\theta)-\delta(\tau,\xi)]^2 \geq \frac{1}{M\int_0^{\tau(\xi)}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}a_t(\theta,\xi)\right]^2 dt}$$

Якщо, як приклад, розглянути випадковий процес

$$\xi_t = K\theta\, t + W_t, t \geq 0, -\infty < \theta < \infty, \text{K – стала},$$

тоді для незміщених послідовних планів оцінювання:

$$M[f(\theta)-\delta(\tau,\xi)]^2 \geq \frac{1}{K^2\cdot\, M\tau(\xi)}$$

Можна продовжити розгляд, ввести план $\Delta^0 = (\tau^0,\delta^0), \tau^0 \equiv T$, $\delta^0(T,x) = \frac{x_T}{K\cdot T}$, котрий буде незміщеним. Для цього плану виконані усі умови теореми, тому для нього:

$$M[\delta^0(T,\xi)-\theta]^2 \geq \frac{1}{K^2\cdot T}$$

Оскільки $M\left[\frac{\xi_T}{K\cdot T}-\theta\right]^2 = M\left(\frac{W_T}{K\cdot T}\right)^2 = \frac{1}{K^2\cdot T}$, можна виснувати, що серед усіх незміщених послідовних планів $\Delta = (\tau,\delta)$ з властивістю $M\tau(\xi) \leq T$ (для усіх $-\infty < \theta < \infty$) і які задовольняють умовах наведеної теореми, план Δ^0 є оптимальним. Тобто, можна зробити висновок, що для усіх $\{\theta : -\infty < \theta < \infty\}$:

$$M[f(\theta) - \delta(\tau, \xi)]^2 \geq M[\delta^0(T, \xi) - \theta]^2 \geq \frac{1}{K^2 \cdot T}$$

Одержали оптимальну нижню границю для середньоквадратичних похибок при оцінюванні параметру одного із класів випадкових процесів.

Список літератури

1. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов, гл. ред. ф.-м. литер., изд. «Наука», 1974.-695с.
2. Турчин В.М. Математична статистика: навч. посібник – К.: «Академія», 1999.-240с.
3. Пушак Я.С., Лозовий Б.Л. Теорія ймовірностей і елементи математичної статистики: навч. посіб.-Львів.: «Магнолія-2006»,2007.-276с.